DEVOIR de MATHS DS01 (2 séquences)

Probabilités, Loi Binomiale, Analyse de Première Année

La qualité de la rédaction, le rappel des formules du cours, l'usage des couleurs et le soin seront appréciés dans la note finale.
A traiter sur double feuille **exclusivement**. Utiliser au besoin du papier millimétré.
Sujets extraits de http ://www.apmep.asso.fr/ (Examens et Concours)

Exercice 1 - BTS CGO Nouvelle Calédonie Novembre 2011 **4 points**

On jette un dé non truqué, la partie est gagnée si on obtient un 5 ou un 6. On joue 50 parties de suite.

Dans cet exercice les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}

A. Loi binomiale

On considère la variable aléatoire X qui associe le nombre de parties gagnées au cours d'une suite de 50 parties.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité de l'évènement E : « on gagne 15 parties ».
3. Calculer la probabilité de l'évènement F : « on gagne 15, ou 16, ou 17 parties ».

Exercice 2 - BTS CGO Métropole 2011 **4 points**

Un grossiste spécialisé dans le jardinage reçoit des sachets de graines d'aubergines « bio » (c'est-à-dire issues de l'agriculture biologique).

Dans tout ce qui suit, les probabilités sont à arrondir à 10^{-4}

A. Loi binomiale

On note D l'évènement « un sachet prélevé dans un stock important est défectueux ». On suppose que $P(D) = 0,05$.
On prélève au hasard 40 sachets pour vérification, le stock étant assez important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui à tout prélèvement de 40 sachets associe le nombre de sachets défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité pour que dans un tel prélèvement, il y ait exactement 2 sachets défectueux.
3. Calculer la probabilité pour que dans un tel prélèvement, il y ait au moins un sachet défectueux.

Exercice 3 - BTS CGO Nouvelle Calédonie Novembre 2011 **12 points**

A. Étude d'une fonction et calcul intégral

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,15]$ par

$$f(x) = 0,2x + 1 + \mathrm{e}^{-0,2x+1}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout x de $[0\,;\,15]$.
   b. Résoudre dans $[0\,;\,15]$ l'inéquation : $1 - \mathrm{e}^{-0,2x+1} \geqslant 0$.
   c. En déduire le sens de variation de f sur $[0\,;\,15]$.

2. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur une feuille de papier millimétré **à rendre avec la copie.**

3. On note $I = \displaystyle\int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   a. Démontrer que $I = 35 - 5\mathrm{e}^{-2}$.

   b. En déduire la valeur moyenne V_m de f sur $[5\,;\,15]$.

   c. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de V_m.

B. Application économique

Une entreprise fabrique du matériel informatique.
Lorsqu'elle fabrique x centaines d'objets d'un certain type ($5 \leqslant x \leqslant 15$), le coût total de production, en milliers d'euros, est modélisé par $f(x)$, où f est la fonction définie à la partie A.

1. Déterminer le coût total de production en milliers d'euros :

   a. de 1 000 objets;

   b. de 1 100 objets.

   Au a. et au b., arrondir à 10^{-3}.

2. **a.** Déterminer la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de $f(11) - f(10)$·

   b. $f(11) - f(10)$ représente la dépense occasionnée par la production d'une centaine d'objets supplémentaires lorsqu'on a déjà fabriqué dix centaines d'objets.

   Plus généralement, $f(x+1) - f(x)$ représente la dépense occasionnée par la production d'une centaine d'objets supplémentaires lorsqu'on a déjà fabriqué x centaines d'objets.

   En économie, on note $f(x+1) - f(x) = C_m(x)$ et $C_m(x)$ s'appelle le « *coût marginal au rang x* ».

   On prend $f'(x)$ comme approximation de $C_m(x)$, où f' est la fonction dérivée de la fonction f.

   En déduire, en milliers d'euros, la valeur approchée, arrondie à 10^{-3}, du coût de production de la onzième centaine d'objets en utilisant la fonction dérivée de f.

   Vérifier que les résultats obtenus au a. et au b. ne diffèrent que de 7 euros.

3. On suppose que tous les objets produits sont vendus.

   Chaque centaine d'objets est vendue 0,4 milliers d'euros. La recette pour x centaines d'objets vendus est donc donnée par $g(x) = 0,4x$.

   a. Tracer la droite Δ d'équation $y = 0,4x$ sur le graphique précédent.

   b. Par lecture graphique, indiquer la production x_0 à partir de laquelle l'entreprise réalise un bénéfice.
   On fera apparaître sur la figure les constructions utiles.